## EPREUVE de MATHEMATIQUES I

Durée 2 heures

(tous les candidats)

**L'usage des calculatrices est interdit**

$\Re$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Soit E = $\Re^3$, espace vectoriel sur $\Re$, muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. $f$ est un endomorphisme de E admettant $A$ pour matrice dans la base $B$.

On note $(0)$ la matrice nulle et $I$ la matrice unité d'ordre trois.

### I

1.1 Soit $\lambda$ un nombre réel.
Montrer que si V est vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\mu$, V est aussi vecteur propre de $A^3$ et de $(A - \lambda\ I)^3$. Quelles sont les valeurs propres associées ?

1.2

1.2.1 Montrer que si $(A - \lambda\ I)^3 = (0)$, $A$ admet la seule valeur propre $\lambda$ triple, réelle.

1.2.2 Enoncer la réciproque.

Les candidats M.P la démontrent ; les autres candidats admettent le résultat.

### II

Soit $a, b, k$ trois réels non nuls. On considère la matrice $A$

$$A = \begin{pmatrix} k-a & -a & -a \\ b & k & b \\ a & a & k+a \end{pmatrix}$$

2.1 Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.

2.2 Déterminer une base $B' = (v_1, v_2, v_3)$ de E dans laquelle $f$ admette $T$

pour matrice, avec $T = \begin{pmatrix} k & a & 0 \\ 0 & k & b \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

et $v_1 = e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3$

$v_2 = y_2 e_2 + z_2 e_3$

$v_3 = y_3 e_2 + z_3 e_3$

$y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3$ étant des nombres réels à déterminer.

2.3 Ecrire la matrice $P$ de passage de la base $B$ à la base $B'$.
Calculer $P^{-1}$.
Exprimer $T$ en fonction de $A$, $P$ et $P^{-1}$.

## III

On considère le système différentiel *(S)*

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (k-a)x - a(y+z) - at \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x+z) + ky + 1 \\ \dfrac{dz}{dt} = a(x+y) + (k+a)z + at \end{cases}$$

où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions réelles de la variable réelle $t$ de classe $C^1$

On écrit le système sous la forme matricielle

$$(S) \quad \frac{dU}{dt} = AU(t) + C_0 + t\, C_1$$

avec $U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

et $A$ la matrice du **II**

3.1 Soit $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ les composantes de $U(t)$ dans la base $B'$.

On pose $\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$

Exprimer $\frac{d\Gamma}{dt}$ en fonction de $t, \Gamma(t), C_0, C_1, T$ et $P^{-1}$

3.2 Ecrire le système *(S')* ainsi obtenu et le résoudre.

3.3 En déduire la solution générale de *(S)*

## IV

4.1 On pose $A = A_0 + k\ I$. Exprimer $A_0$ et calculer $A_0^2, A_0^3$.

4.2 Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$A^n = p(n,k)I + q(n,k)A_0 + r(n,k)A_0^2$
où $p(n,k), q(n,k), r(n,k)$ sont trois fonctions de $n$ et $k$ que l'on déterminera .

4.3 On définit la matrice exponentielle par

$$e^{At} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=o}^{n=N} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Montrer que :

$$e^{At} = \lambda(k,t)I + \mu(k,t)A_0 + \nu(k,t)A_0^2$$

où $\lambda(k,t), \mu(k,t), \nu(k,t)$ sont trois fonctions de $k$ et $t$ que l'on déterminera.

4.4 On désigne par $(S_1)$, le système homogène associé à *(S)* défini par $\frac{dU}{dt} = AU(t)$.

Soit $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ où $K_1, K_2, K_3$ sont trois réels quelconques.

Montrer que, quel que soit $(K_1, K_2, K_3), U(t) = e^{At}K$ est solution de $(S_1)$.

4.5

4.5.1 Montrer que $A$ est inversible.

4.5.2 Vérifier que $U_0(t) = -\left(A^{-1}C_0 + \left(A^{-1}\right)^2 C_1 + t\ A^{-1}C_1\right)$
est une solution particulière de *(S)*. Simplifier l'expression de $U_0(t)$.

4.6 En déduire, par analogie avec la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre, la solution générale de *(S)*.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail